

ELEMENTI DI INFORMATICA TEORICA

Parte 2: Linguaggi Formali e Automi

2.3 Automi a Pila

Giovanni Amendola

Corso di laurea triennale in Informatica
Università della Calabria

23 aprile 2022

Anno Accademico 2021/2022

Il movente dell'automata

Wolfgang von Kempelen, *Il turco* (automa giocatore di scacchi), 1770



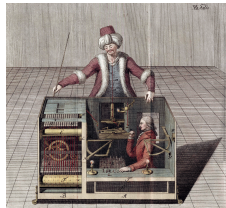
Il movente dell'automata

Deep Blue sconfigge Kasparov, 1996



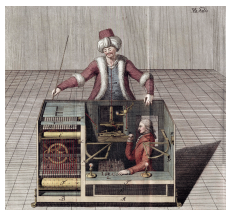
Il movente dell'automata

Walter Benjamin, *Tesi di filosofia della storia*, 1940



Il movente dell'automata

Walter Benjamin, *Tesi di filosofia della storia*, 1940



«1. Si dice che ci fosse un **automata** costruito in modo tale da rispondere, ad ogni mossa di un **giocatore di scacchi**, con una contromossa che gli assicurava la vittoria. Un fantoccio in veste da turco, con una pipa in bocca, sedeva di fronte alla scacchiera, poggiata su un'ampia tavola. Un sistema di specchi suscitava l'illusione che questa tavola fosse trasparente da tutte le parti.

In realtà c'era accoccolato un omino gobbo, che era un asso nel gioco degli scacchi e che guidava per mezzo di fili la mano del burattino. Qualcosa di simile a questo apparecchio si può immaginare nella filosofia. Vincere deve sempre il **fantoccio chiamato "materialismo storico"**. Esso può farcela senz'altro con chiunque se prende al suo servizio la **teologia**, che oggi, com'è noto, è **piccola e brutta, e che non deve farsi scorgere da nessuno**»

Il movente dell'automa

- **L'illusione del razionalismo**
- Ogni **sistema sociale** ed ogni **persona** si basano, in ultima analisi, su una **fede** (quasi sempre **inconsapevole**)

Il movente dell'automa

- **L'illusione del razionalismo**
- Ogni **sistema sociale** ed ogni **persona** si basano, in ultima analisi, su una **fede** (quasi sempre **inconsapevole**)
- **Fede del sistema socio-politico-culturale**
 - In superficie: si propone come l'unico realmente razionale

Il movente dell'automa

- **L'illusione del razionalismo**
- Ogni **sistema sociale** ed ogni **persona** si basano, in ultima analisi, su una **fede** (quasi sempre **inconsapevole**)
- **Fede del sistema socio-politico-culturale**
 - In superficie: si propone come l'unico realmente razionale
 - In profondità: una fede di fondo nella logica del "neoliberalismo" (benessere sociale = mercato libero, massimizzazione del profitto)

Il movente dell'automa

- **L'illusione del razionalismo**
- Ogni **sistema sociale** ed ogni **persona** si basano, in ultima analisi, su una **fede** (quasi sempre **inconsapevole**)
- **Fede del sistema socio-politico-culturale**
 - In superficie: si propone come l'unico realmente razionale
 - In profondità: una fede di fondo nella logica del "neoliberalismo" (benessere sociale = mercato libero, massimizzazione del profitto)
 - nella pratica: crescente divario tra "arricchiti" e "impovertiti"

Il movente dell'automata

- **L'illusione del razionalismo**
- Ogni **sistema sociale** ed ogni **persona** si basano, in ultima analisi, su una **fede** (quasi sempre **inconsapevole**)
- **Fede del sistema socio-politico-culturale**
 - In superficie: si propone come l'unico realmente razionale
 - In profondità: una fede di fondo nella logica del "neoliberalismo" (benessere sociale = mercato libero, massimizzazione del profitto)
 - nella pratica: crescente divario tra "arricchiti" e "impoveriti"
- **Fede della persona**
 - In superficie: "credenti", "non credenti", "agnostici", "indifferenti"

Il movente dell'automata

- **L'illusione del razionalismo**
- Ogni sistema sociale ed ogni persona si basano, in ultima analisi, su una **fede** (quasi sempre **inconsapevole**)
- **Fede del sistema socio-politico-culturale**
 - In superficie: si propone come l'unico realmente razionale
 - In profondità: una fede di fondo nella logica del "neoliberalismo" (benessere sociale = mercato libero, massimizzazione del profitto)
 - nella pratica: crescente divario tra "arricchiti" e "impoveriti"
- **Fede della persona**
 - In superficie: "credenti", "non credenti", "agnostici", "indifferenti"
 - In profondità: una fede spesso confusa e contraddittoria
 - si mostra nelle scelte e nell'agire concreto della vita
 - si mostra nella sua incoerenza in pensieri e azioni irrazionali

Il movente dell'automata

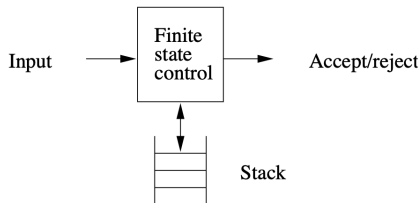
- **L'illusione del razionalismo**
- Ogni **sistema sociale** ed ogni **persona** si basano, in ultima analisi, su una **fede** (quasi sempre **inconsapevole**)
- **Fede del sistema socio-politico-culturale**
 - In superficie: si propone come l'unico realmente razionale
 - In profondità: una fede di fondo nella logica del "neoliberalismo" (benessere sociale = mercato libero, massimizzazione del profitto)
 - nella pratica: crescente divario tra "arricchiti" e "impoveriti"
- **Fede della persona**
 - In superficie: "credenti", "non credenti", "agnostici", "indifferenti"
 - In profondità: una fede spesso confusa e contraddittoria
 - si mostra nelle scelte e nell'agire concreto della vita
 - si mostra nella sua incoerenza in pensieri e azioni irrazionali
- **Consapevolezza della fede** ⇒ Rottura degli **schemi automatici** ⇒ Maggiore **libertà** personale e sociale

Automati a pila

- Rispetto ad un automa a stati finiti (non deterministico), l'automato a pila ha una nuova componente: la **pila** (*stack*).
- Intuitivamente, un automato a pila svolge le seguenti operazioni sulla pila
 - **scrive** un simbolo e lo **inserisce nella pila**,
 - **legge** un simbolo e lo **estrae dalla pila**.

Automati a pila

- Rispetto ad un automa a stati finiti (non deterministico), l'automato a pila ha una nuova componente: la **pila** (*stack*).
- Intuitivamente, un automato a pila svolge le seguenti operazioni sulla pila
 - **scrive** un simbolo e lo **inserisce nella pila**,
 - **legge** un simbolo e lo **estrae dalla pila**.
- Poiché queste operazioni possono farsi solo sull'ultimo elemento "in cima" alla pila, l'automato a pila è anche detto **LIFO** (*last-in first-out*).



Vantaggi degli Automati a pila

- La pila può mantenere una quantità illimitata di informazione, a differenza degli ASF che hanno memoria limitata (ovvero, l'insieme finito di stati).
- Riconoscono linguaggi che gli ASF non possono riconoscere.

Vantaggi degli Automati a pila

- La pila può mantenere una quantità illimitata di informazione, a differenza degli ASF che hanno memoria limitata (ovvero, l'insieme finito di stati).
- Riconoscono linguaggi che gli ASF non possono riconoscere.

Esempio: Automa a pila per il linguaggio $\{0^n 1^n \mid n > 0\}$

Vantaggi degli Automati a pila

- La pila può mantenere una quantità illimitata di informazione, a differenza degli ASF che hanno memoria limitata (ovvero, l'insieme finito di stati).
- Riconoscono linguaggi che gli ASF non possono riconoscere.

Esempio: Automa a pila per il linguaggio $\{0^n 1^n \mid n > 0\}$

Nella pila si possono memorizzare il numero di 0 letti prima di iniziare a leggere gli 1.

- legge i simboli di input
- appena legge 0 lo mette nella pila (per tutti gli 0 che legge)
- appena legge 1 estrae uno 0 dalla pila (per ogni 1 letto)
- se terminata la lettura la pila è vuota, allora accetta
- altrimenti rifiuta

Automa a pila

Definizione: Automa a pila

Un *automa a pila* è una settupla $\langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$, dove

1. Q è un insieme finito non vuoto di *stati*.
2. Σ è un alfabeto finito non vuoto di input.
3. Γ è l'*alfabeto della pila*.
4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$.
5. $q_0 \in Q$ è lo *stato iniziale*.
6. $Z_0 \in \Gamma$ è il *simbolo iniziale della pila*.
7. $F \subseteq Q$ è l'insieme degli *stati di accettazione*.

- L'automa a pila è dunque definito in modo **Non Deterministico**.
- Un automa a pila è denotato con **PDA**, dall'inglese *Pushdown Automaton*.

Caratteristiche della funzione di transizione

- δ : (stato corrente, simbolo da leggere in input, simbolo letto sulla pila) \rightarrow (nuovo stato, modifica alla pila)
- Le transizioni di un automa a pila sono della forma $(q_2, \gamma) \in \delta(q_1, a, b)$ cioè:
 - Se un automa è nello stato q_1 con input a e in cima alla pila b
 - allora l'automata si muove nello stato q_2 leggendo a e sostituendo b con γ sulla pila.
 - se $\gamma = \epsilon$, viene **cancellato** b dalla sommità della pila;
 - se $\gamma = b$, la pila rimane **invariata**;
 - se $\gamma = c$, b è **sostituito da c** ;
 - se $\gamma = cb$, c è **inserito in cima**, lasciando b .
 - se $\gamma = cd$, b è **sostituito da d** e c è **inserito in cima**.
- Nel diagramma: un arco da q_1 a q_2 etichettato con $a, b/\gamma$.

Accettazione di un automa a pila

- Per verificare se la **pila** è **vuota**, supporremo che all'inizio la pila contenga un simbolo Z_0 .
- Pertanto, per verificare nello stato finale che la pila sia vuota bisognerà verificare che Z_0 sia in cima alla pila.

Accettazione di un automa a pila

- Per verificare se la **pila** è **vuota**, supporremo che all'inizio la pila contenga un simbolo Z_0 .
- Pertanto, per verificare nello stato finale che la pila sia vuota bisognerà verificare che Z_0 sia in cima alla pila.
- Il **linguaggio accettato** da un automa a pila è l'insieme delle stringhe per cui l'automata
 - 1 ha finito di leggere la stringa di input;
 - 2 si trova in uno stato finale;
 - 3 la pila è vuota (in cima c'è Z_0).

Esempio

Stringhe palindrome di lunghezza pari

Consideriamo il linguaggio delle stringhe palindrome di lunghezza pari su $\{0, 1\}$:

$$\mathcal{L} = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\},$$

Esempio

Stringhe palindrome di lunghezza pari

Consideriamo il linguaggio delle stringhe palindrome di lunghezza pari su $\{0, 1\}$:

$$\mathcal{L} = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\},$$

con grammatica

$$S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid \epsilon.$$

Esempio

Stringhe palindrome di lunghezza pari

Consideriamo il linguaggio delle stringhe palindrome di lunghezza pari su $\{0, 1\}$:

$$\mathcal{L} = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\},$$

con grammatica

$$S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid \epsilon.$$

Definiamo un automa a pila che utilizza la pila nel seguente modo:

- fino a quando legge i simboli di w memorizza i simboli letti nella pila;
- quando inizia a leggere w^R , se il simbolo memorizzato in cima è uguale a quello in input, allora svuota la pila.

Esempio

Stringhe palindrome di lunghezza pari

$$\mathcal{L} = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Esempio

Stringhe palindrome di lunghezza pari

$$\mathcal{L} = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

0 , Z₀ / 0 Z₀

1 , Z₀ / 1 Z₀

0 , 0 / 0 0

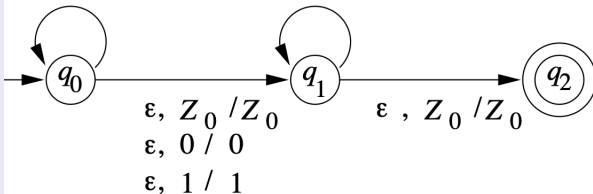
0 , 1 / 0 1

1 , 0 / 1 0

1 , 1 / 1 1

0 , 0 / ε

1 , 1 / ε



Esempio

Stringhe palindrome di lunghezza pari

$$\mathcal{L} = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Esempio

Stringhe palindrome di lunghezza pari

$$\mathcal{L} = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

L'automa a pila è

$$\langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\} \rangle$$

	0, Z ₀	1, Z ₀	0,0	0,1	1,0	1,1	ε, Z ₀	ε, 0	ε, 1
→ q ₀	q ₀ , 0Z ₀	q ₀ , 1Z ₀	q ₀ , 00	q ₀ , 01	q ₀ , 10	q ₀ , 11	q ₁ , Z ₀	q ₁ , 0	q ₁ , 1
q ₁			q ₁ , ε			q ₁ , ε	q ₂ , Z ₀		
*q ₂									

Albero di computazione

Esempio: Stringhe palindrome di lunghezza pari

$$\mathcal{L} = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

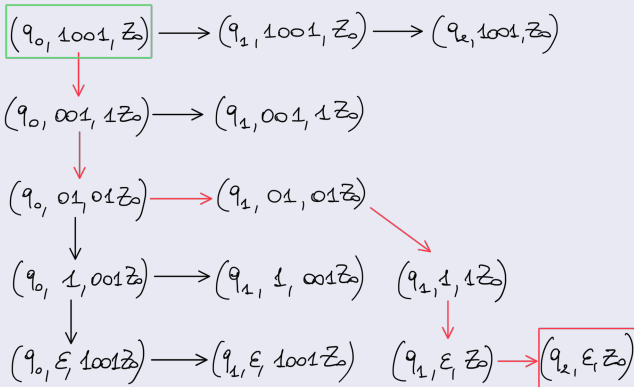
Albero di computazione per la stringa $1001 \in \mathcal{L}$.

Albero di computazione

Esempio: Stringhe palindrome di lunghezza pari

$$\mathcal{L} = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Albero di computazione per la stringa 1001 $\in \mathcal{L}$.



Automati a pila e linguaggi non contestuali

Teorema (PDA e linguaggi context-free)

Un linguaggio è non contestuale se e solo se esiste un automa a pila che lo riconosce.

Automati a pila e linguaggi non contestuali

Teorema (PDA e linguaggi context-free)

Un linguaggio è non contestuale se e solo se esiste un automa a pila che lo riconosce.

Osservazione: PDA deterministici e non

A differenza degli AFN, che generano linguaggi equivalenti a quelli generati dagli AFD, i **PDA non deterministici** generano **più linguaggi** rispetto a quelli generati da un **PDA deterministico**.

- Ci sono linguaggi non contestuali che non possono essere generati da un PDA deterministico.
- **Esempio:** $\mathcal{L} = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, i \neq j \text{ oppure } j \neq k\}$ è non contestuale ed esiste un PDA non deterministico che lo riconosce, ma non esiste alcun PDA deterministico.